Лекція № 29

Отримали на минулій лекції формули для запізнювальних потенціалів (див. ф-ли (9.2)):

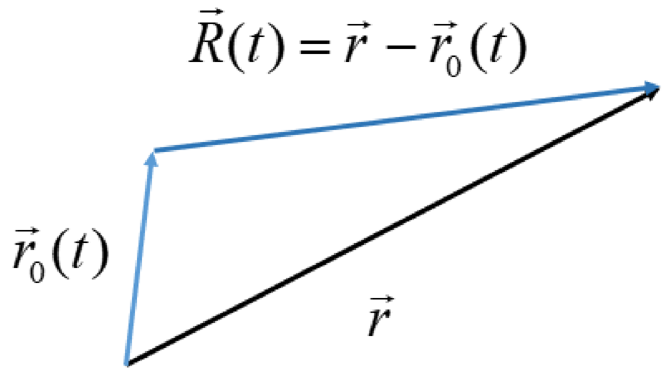
$$\varphi(\vec{r},t)=\iiint\limits_V \frac{\rho_{t-R/c}}{R}dV'; \quad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R}dV',$$

де $\rho_{t-R/c}=\rho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right); \quad \vec{j}_{t-R/c}=\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right).$

Застосуємо ці формули для отримання поля одного довільно рухомого заряду.

9.2. Поле довільно рухомого заряду

Нехай точковий заряд e рухається за законом $\vec{r}_0(t)$.



Поле в точці спостереження $\vec{r}$ визначається станом заряду в момент часу

$$t'=t-\frac{R(t')}{c}.$$

Рівняння, яке визначає зв'язок між t та t'

$$t=t'+\frac{R(t')}{c}; \quad R(t')=c(t-t');$$
$$R(t')=\sqrt{\left(x-x_0(t')\right)^2+\left(y-y_0(t')\right)^2+\left(z-z_0(t')\right)^2}. \tag{9.4}$$

Виберемо систему відліку, де в момент часу t' заряд покоївся. В цій системі (система, що супроводжує заряд) його поле визначається кулонівським потенціалом

$$\varphi=\frac{e}{R(t')}; \ \vec{A}=0$$

або

$$\varphi = \frac{e}{c(t-t')};\ \vec{A} = 0. \tag{9.5}$$

Знайдемо 4-потенціал в довільній системі відліку, для якого при $\vec{\upsilon} = 0$ маємо кулонівський потенціал.

4-швидкість u^k рухомого заряду в довільній системі відліку

$$u^k = \frac{dx^k}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right)$$

В системі, яка його супроводжує, тобто в якій $\vec{\upsilon}$=0

$$u^k = (1,0).$$

4-вектор R^k

$$R^k = \left(c(t-t'), \vec{r} - \vec{r}'\right).$$

Величини x', y', z', t' пов'язані рівнянням (9.4). Формулу (9.4) можна представити у інваріантному вигляді

$$R_k = \left(c(t-t'), -(\vec{r} - \vec{r}')\right);$$

$$R^k = \left(c(t-t'), \vec{r} - \vec{r}'\right).$$

$$R_k R^k = c^2(t-t')^2 - R^2 = 0.$$

$$R_k R^k = 0. \tag{9.6}$$

Знаменник в (9.5) можна представити, як згортання двох 4-векторів

$$R_k u^k = c(t-t') - \text{inv}.$$

4-потенціал, який шукаємо

$$A^i = e\frac{u^i}{R_k u^k}. \tag{9.7}$$

Пишемо тепер згортку $R_k u^k$ в термінах величин лабораторної системи відліку

$$R_k u^k = c(t-t')\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - (\vec{r} - \vec{r}')\frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{c^2(t-t') - \vec{R}\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{c(t-t') - \frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};$$

$$c(t-t') = R;$$

$$R_k u^k = \frac{R - \frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

У тривимірних позначеннях отримуємо такі потенціали поля, що створює точковий довільно рухомий заряд

$$\varphi = e\frac{u^0}{R_k u^k} = \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}{R-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}\right) = \frac{e}{R-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}};$$

$$\vec{A} = e\left(\frac{\vec{\upsilon}}{c\cancel{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}{R-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}\right) = \frac{e\vec{\upsilon}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}\right)}.$$

$$\varphi = \frac{e}{R-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}; \quad \vec{A} = \frac{e\vec{\upsilon}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}\right)}. \tag{9.8}$$

Всі величини справа беруться в момент часу t', для якого виконана умова $c(t-t') = R(t')$, тому згортка $R_k R^k = 0$ (див. ф-лу (9.6)). Тепер треба знайти напруженості за загальними формулами

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi; \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Диференціювати φ та $\vec{A}$ слід по координатах точки спостереження x, y, z в час спостереження t. В (9.8) всі величини залежать від t' та є неявними функціями x, y, z, t. Наприклад,

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Шукаємо похідну $\dfrac{\partial t'}{\partial t}$. Скористаємось визначенням

$$t = t' + \frac{R(t')}{c};$$

Беремо похідні по t від обох частин:

$$\frac{\partial}{\partial t}t=\frac{\partial}{\partial t}\left(t'+\frac{R(t')}{c}\right);\quad \frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial R(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=1;$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\left(1+\frac{1}{c}\underbrace{\frac{\partial R(t')}{\partial t'}}_{\dot{R}(t')}\right)=1;\quad \frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1+\frac{1}{c}\dot{R}(t')};$$

Візьмемо похідну від $R^2=\left(\vec{R},\vec{R}\right)$

$$2R\dot{R}=2\left(\vec{R},\frac{\partial}{\partial t'}\vec{R}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\vec{R}=\frac{\partial}{\partial t'}(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))=-\frac{\partial}{\partial t'}\vec{r}_0(t')=-\vec{\upsilon};$$

$$R\dot{R}=-\left(\vec{R},\vec{\upsilon}\right);\quad \dot{R}=-\frac{\left(\vec{R},\vec{\upsilon}\right)}{R};$$

Тепер похідна $\dfrac{\partial t'}{\partial t}$ пишеться так:

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\dfrac{\vec{\upsilon}\vec{R}}{cR}}$$

Знайшли

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{1}{1-\dfrac{\vec{\upsilon}\vec{R}}{cR}}.$$

Похідна по часу t від векторного потенціалу:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{e\vec{\upsilon}}{R-\dfrac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}\right)=\frac{e\dot{\vec{\upsilon}}}{R-\dfrac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}-\frac{1}{\left(R-\dfrac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}\right)^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(R-\frac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}\right)=$$

$$=\frac{e\dot{\vec{\upsilon}}}{R-\dfrac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}}-\frac{e\vec{\upsilon}}{\left(R-\dfrac{\vec{R}\vec{\upsilon}}{c}\right)^2}\left(\dot{R}-\frac{\dot{\vec{R}}\vec{\upsilon}}{c}-\frac{\vec{R}\dot{\vec{\upsilon}}}{c}\right)=$$

$$=\frac{e\dot{\vec{v}}}{R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}}-\frac{e\vec{v}}{\left(R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^2}\left(\dot{R}+\frac{\vec{v}^2}{c}-\frac{\vec{R}\dot{\vec{v}}}{c}\right);$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}=\frac{e\dot{\vec{v}}}{R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}}-\frac{e\vec{v}}{\left(R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^2}\left(-\frac{\vec{R}\vec{v}}{R}+\frac{\vec{v}^2}{c}-\frac{\vec{R}\dot{\vec{v}}}{c}\right).$$

$$=\frac{e\dot{\vec{v}}}{R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}}+\frac{e\vec{v}}{\left(R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^2}\left(\frac{\vec{R}\vec{v}}{R}+\frac{\vec{R}\dot{\vec{v}}}{c}-\frac{\vec{v}^2}{c}\right).$$

Шукаємо градієнт φ

$$\nabla_r\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\nabla t'+\nabla_R\varphi;$$

Для пошуку градієнта $\nabla_r t'$ знов використаємо формулу (9.4) – візьмемо градієнт від обох частин $t'+\frac{1}{c}R(t')=t$:

$$\nabla_r t'+\frac{1}{c}\nabla_r R(t')=\nabla_r t=0;$$

$$\nabla_r t'=-\frac{1}{c}\nabla_r R(t')=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\nabla_r t'+\frac{\vec{R}}{R}\right);$$

$$\nabla_r t'\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R};\quad \nabla_r t'\left(1-\frac{\vec{v}\vec{R}}{cR}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R};$$

$$\nabla_r t'=-\frac{\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)}.$$

Проміжні викладки далі не наводимо. Ось результат для напруженості електричного та магнітного поля довільно рухомого заряду

$$\vec{E}=e\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)}{\left(R-\frac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)^3}+\frac{e}{c^2\left(R-\frac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)^3}\left[\vec{R}\left[\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R,\dot{\vec{v}}\right]\right]; \tag{9.9}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{R}\left[\vec{R},\vec{E}\right].$$

Всі величини в правих частинах (9.9) беруться в момент часу t'. $\dot{\vec{v}} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t'}$.

Електричне поле складається із двох частин. Перша частина

$$e\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\dfrac{\vec{v}}{c}R\right)}{\left(R-\dfrac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)^3} -$$

залежить тільки від швидкості, а на великих відстанях від заряду згасає, як $\dfrac{1}{R^2}$.

Це є поле рівномірно рухомого заряду.

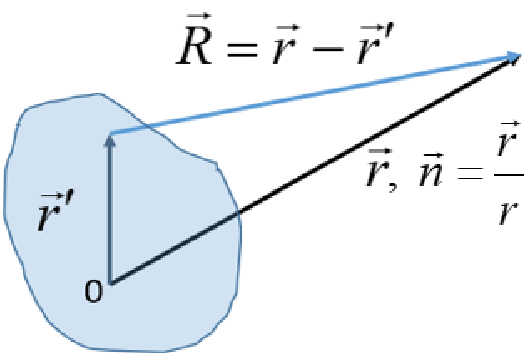
Друга частина

$$\frac{e}{c^2\left(R-\dfrac{\vec{v}\vec{R}}{c}\right)^3}\left[\vec{R}\left[\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R,\dot{\vec{v}}\right]\right]$$

Залежить від прискорення $\dot{\vec{v}}$, на великих відстанях від заряду згасає, як $\dfrac{1}{R}$. Ця частина пов'язана із полем випромінювання.

9.3. Випромінювання електромагнітних хвиль

9.3.1. Поле системи зарядів на далеких відстанях



Застосуємо формули для запізнювальних потенціалів (9.2) для дослідження поведінки поля рухомих зарядів на далеких відстанях від системи зарядів $r' \sim a \ll r$

$$\varphi(\vec{r},t)=\iiint\limits_V \frac{\rho_{t-R/c}}{R}dV'=\iiint\limits_V \frac{\rho\left(t-R/c\right)}{R}dV'$$
$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}_{t-R/c}}{R}dV'=\frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}\left(t-R/c\right)}{R}dV'$$

Розкладаємо у ряд Тейлора знаменник $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$ по малому параметру $r'\ll r$:

$$R=|\vec{r}-\vec{r}'|\approx r-\underbrace{\frac{\partial}{\partial\vec{r}}|\vec{r}-\vec{r}'|\Big|_{\vec{r}'=0}}_{\nabla r=\vec{n}}\cdot\vec{r}'=r-\vec{n}\vec{r}'.$$

Скалярний потенціал

$$\varphi\approx\iiint\limits_V \frac{\rho\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)}{r-\vec{n}\vec{r}'}dV'.$$

Векторний потенціал

$$\vec{A}\approx\frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\vec{j}\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)}{r-\vec{n}\vec{r}'}dV'.$$

В знаменнику цих формул можна відкинути малий доданок $\vec{n}\vec{r}'$ та замінити $r-\vec{n}\vec{r}'$ на r. В чисельнику це робити не маємо права, бо значення густини зарядів $\rho\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)$ та густини струмів $\vec{j}\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)$ можуть суттєво змінитися за час $\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}$, якщо заряди рухаються із великими швидкостями. Отримали наближені формули потенціалів поля випромінювання

$$\begin{gathered}\varphi\approx\frac{1}{r}\iiint\limits_V \rho\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)dV';\\ \vec{A}=\frac{1}{rc}\iiint\limits_V \vec{j}\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{r}'}{c}\right)dV'.\end{gathered}\tag{9.10}$$

Обидва потенціали (9.10) згасають з відстанню від системи зарядів, як $\sim\frac{1}{r}$. Час входить в праву частину в комбінації $t-\frac{r}{c}$.